MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN FLU BURUNG PADA MANUSIA DAN UNGGAS DOMESTIK DENGAN FAKTOR IMIGRASI DAN VAKSINASI

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

Oleh :

LILI MARDIANI
11554202639

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2019

LEMBAR PERSETUJUAN

MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN FLU BURUNG PADA MANUSIA DAN UNGGAS DOMESTIK DENGAN FAKTOR IMIGRASI DAN VAKSINASI

TUGAS AKHIR

Oleh:

LILI MARDIANI
11554202639

Telah diperiksa dan disetujui sebagai Laporan Tugas Akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 13 September 2019

Ketua Program Studi	Pembimbing
Ari Pani Desvina, M.Sc.	**Mohammad Soleh, M.Sc.**
NIP. 19811225 200604 2 003	**NIP.19751231 200901 1 052**

LEMBAR PENGESAHAN

MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN FLU BURUNG PADA MANUSIA DAN UNGGAS DOMESTIK DENGAN FAKTOR IMIGRASI DAN VAKSINASI

TUGAS AKHIR

Oleh:

LILI MARDIANI
11554202639

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 13 September 2019

Pekanbaru,13 September 2019
Mengesahkan,

Dekan	Ketua Program Studi
Dr. H. Mas'ud Zein, M.Pd.	**Ari Pani Desvina, M.Sc.**
NIP. 19631214 198803 1 002	**NIP. 19811225 200604 2 003**

DEWAN PENGUJI

Ketua : Fitri Aryani, M.Sc.

Sekretaris : Mohammad Soleh, M.Sc.

Anggota I : Dr. Yuslenita Muda, M.Sc.

Anggota II : Irma Suryani, M.Sc.

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjam Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam tugas akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan di dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 13 September 2019
Yang membuat pernyataan,

LILI MARDIANI
NIM: 11554202639

LEMBAR PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirabbil'alamin, puji syukur tak henti-hentinya kepada Allah Subhanahu wata'ala, atas nikmat, karunia dan rahmat-Nya sehingga saya dapat menyelesaikan tughas akhir ini.

Ucapan terimakasih yang tak terhingga kepada kedua orang tuaku yang telah membesarkan dan mendidik jiwa raga ini dengan penuh kasih sayang yang tulus. Doa dan harapan yang beliau berikan selalu mengiringi langkah perjalanan hidupku untuk menjadi sosol yang diinginkan.

Ucapan terim kasih kepada keluarga besar Jiman dan Muriati serta kakak dan adikku yang telah mendukungku, memotivasi setiap langkahku hingga aku mampu melewati hari sulitku dan menemaniku dalam suka maupun duka.

Dengan penuh haru dan segala kerendahan hati kupersembahkan gelar sarjanaku buat Ibunda dan Ayahanda tercinta yang telah memberikan cinta kasih, perjuangan dan doa yang tiada henti.

Allah selalu memberikan hal-hal yang kita butuhkan dalam hidup dengan cara-Nya. Memohonlah kepada-Nya dengan keyakinan dan ketulusan. Serta syukurilah apa yang telah kita miliki saat sekarang ini.

MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN FLU BURUNG PADA MANUSIA DAN UNGGAS DOMESTIK DENGAN FAKTOR IMIGRASI DAN VAKSINASI

LILI MARDIANI
11554202639

Tanggal Sidang : 13 September 2019
Periode Wisuda : 2019

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas akhir ini membahas model matematika untuk penyebaran flu burung pada manusia dan unggas domestik dengan faktor imigrasi dan vaksinasi. Permasalahan yang diangkat dalam penelitian ini adalah bagaimana penurunan model $SIRS_bI_bV_b$ pada penyebaran flu burung pada manusia dan unggas domestik dengan faktor imigrasi dan vaksinasi, bagaimana menentukan titik ekuilibrium dan analisis kestabilan, bagaimana simulasi model menggunakan *Maple 13*. Metode yang digunakan untuk menganalisis masalah adalah dengan studi pustaka. Dari model tersebut diperoleh dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Setelah dianalisis kestabilan pada titik ekuilibrium bebas penyakit akan stabil asimtotik untuk $R_0 < 1$. Sedangkan titik ekuilibrium endemik akan stabil asimtotik untuk $R_0 > 1$. Selanjutnya dilakukan simulasi dan diperoleh bahwa untuk nilai laju vaksinasi kurang dari 0.20 dan laju imigrasi besar dari 0 maka penyakit masih mewabah. Sedangkan untuk nilai laju vaksinasi besar sama 0.20 dan laju imigrasi kecil sama dengan 0.046 maka penyakit akan hilang. Dengan demikian faktor vaksinasi lebih signifikan mempengaruhi penyebaran flu burung dibanding imigrasi.

Kata Kunci: Analisis kestabilan, flu burung, imigrasi, titik ekuilibrium, vaksinasi.

A MATHEMATIC MODEL OF AVIAN INFLUENZA FOR HUMAN AND DOMESTIC BIRD WITH IMIGRATION AND VACCINATION

LILI MARDIANI
11554202639

Date of Final Exam : 13 September 2019
Date of Graduation : 2019

Mathematics Study Program
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRACT

This thesis discusses about a mathematic model of avian influenza for human and domestic bird with imigration and vaccination. The issue raises in this thesis are how to derive $SIRS_bI_bV_b$ model of avian influenza for human and domestic bird with imigration and vaccination, how to determine the equilibrium point and stability analysis, how to simulate the model using Maple 13. The metode used to analyzse the issue is literature reviuw. From the mode fol found two equilibriuml points are disease-free equilibrium point and disease-endemic equilibrium point. The disease-free equilibrium point will be stable for $R_0 < 1$. while the disease-endemic equilibrium point will be stable for $R_0 > 1$. Then doing simulation researcher found that if the vaccination rate is less than 0.20 and the imigration rate is more than 0 so the disease is still endemic. While if the vaccination rate is more than the same 0.20 and theimigration rate is less than the same 0.046 so the disease will closs. Thus vaccination factor is more significantly influence the spread of bird flu than immigration.

***Keywords**: Avian influenza, equilibrium point, immigration, stability analysis, vaccination.*

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis ucapkan kepada Allah *subhanahu wata'ala* karena atas rahmat dan hidayah-nya penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini tepat pada waktunya dengan judul "**Model Matematika Penyebaran Flu Burung pada Manusia dan Unggas Domestik dengan Faktor Imigrasi dan Vaksinasi".** Tugas akhir ini merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar serjana. Shalawat beriring salam kepada Nabi Besar Muhammad *shallallahu 'alaihi wassalam* yang mana sehingga kita dapat merasakan kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi seperti sekarang ini. Selanjutnya dalam penyusunan dan penyelesaan tugas akhir ini penulis tidak terlepas dari bantuan berbagi pihak, baik langsung maupun tidak langsung. Untuk itu sudah sepantasnya penulis mengucapkan terimakasih yang tak terhingga kepada kedua orang tua tercinta, Ayahanda Safri dan Ibunda Nila Wati. Ibunda dan Ayahanda tidak pernah lelah dan tiada henti melimpahkan kasih sayang, perhatian, motivasi yang membuat penulis mampu untuk terus melangkah serta materi yang tidak mungkin mampu terbalas. Semoga Allah *subhanahu wata'ala* selalu merahmati Ayahanda dan Ibunda, memberikan kebahagiaan dunia dan akhirat, Aamiin. Kemudian penulis juga mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada:

1. Bapak Prof. Dr. KH. Ahmad Mujahidin M.Ag, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif kasim Riau.
2. Bapak Dr. Drs. H. Mas'ud Zein, M.Pd., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif kasim Riau.
3. Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif kasim Riau.
4. Ibu Fitri Aryani, M,Sc., selaku Sekretaris Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif kasim Riau.
5. Bapak Mohammad Soleh, M.Sc,. selaku Pembimbing Tugas Akhir yang telah memberi banyak motivasi, ilmu serta nasehat dalam penulisan Tugas Akhir ini.

6. Ibu Dr. Yuslenita Muda, M.Sc., selaku penguji I yang telah memberikan kritikan dan saran sehingga selesainya tugas akhir ini.
7. Ibu Irma Suryani, M.Sc,. selaku penguji II yang telah memberikan kritikan dan saran sehingga selesainya tugas akhir ini.
8. Bapak dan Ibu Dosen di lingkungan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif kasim Riau, khususnya di Jurusan Matematika yang telah banyak membantu penulis dalam berbagai hal.
9. Keluarga tercinta, yang tak henti memberi motivasi, dukungan, semangat, do'a, materi serta kasih sayang yang sangat tulus kepada penulis.
10. Sahabat penulis khususnya Agustini azhari, sekaligus Rima Mawarnita, Wiwit Yulia Sasmita, Dwi Jayanti, yang selalu membantu dan memberikan semangat dan motivasi kepada penulis.
11. Teman-teman Jurusan Matematika khususnya angkatan 2015 kelas B yang selalu memberikan semangat kepada penulis.
12. Semua pihak yang telah banyak membantu baik secara langsung maupun tidak langsung dalam penyelesaan penelitian ini yang tidak dapat penulis sebutkkan satu persatu.

Akhirnya dalam penyusunan dan penulisan tugas akhir ini penulis telah berusaha semaksimal mungkin untuk menghindari kesalahan. Tetapi penulis hanyalah manusia dan manusia adalah tempat salah dan khilaf, sesuai dengan pepatah tak ada gading yang tak retak. Penulis mengharapkan kepada pembaca tugas akhir ini agar memberikan kritik dan saran. Semoga tugas akhir ini dapat memberikan kontribusi yang bermanfaat.

Pekanbaru, 13 September 2019

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

LEMBAR PERSETUJUAN ii
LEMBAR PENGESAHAN iii
LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL iv
LEMBAR PERNYATAAN v
LEMBAR PERSEMBAHAN vi
ABSTRAK vii
ABSTRACT viii
KATA PENGANTAR ix
DAFTAR ISI xi
DAFTAR GAMBAR xiii
DAFTAR TABEL xiv

BAB I PENDAHULUAN
1.1 Latar Belakang I-1
1.2 Rumusan Masalah I-3
1.3 Tujuan Penelitian I-3
1.4 Manfaat Penelitian I-4
1.5 Batasan Masalah I-4
1.6 Sistematika Penulisan I-4

BAB II LANDASAN TEORI
2.1 Flu Burung II-1
2.2 Sistem Persamaan Diferensial II-3
2.3 Linearisasi II-4
2.4 Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium II-9
2.5 Angka Reproduksi Dasar II-10
2.6 Model Epidemi SIR II-11

BAB III METODOLOGI PENELITIAN III-1

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Model Matematika Penyebaran Penyakit Flu Burung Pada Manusia dan Unggas Domestik dengan Faktor Imigrasi dan Vaksinasi IV-1

4.1.1 Asumsi-asumsi IV-1

4.1.2 Pembentukan Model Matematika IV-2

4.2 Titik Ekuilibrium IV-6

4.2.1 Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit IV-7

4.2.2 Titik Ekuilibrium Endemik IV-9

4.3 Angka Rasio Reproduksi Dasar IV-12

4.4 Analisis Kestabilan IV-14

4.4.1 Analisis Kestabilan di Sekitar Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit IV-14

4.4.2 Analisis Kestabilan di Sekitar Titik Ekuilibrium Endemik IV-18

4.5 Simulasi Model IV-33

4.5.1 Simulasi di Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit IV-33

4.5.2 Simulasi di Titik Ekuilibrium Endemik IV-38

BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan V-1

5.2 Saran V-3

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR GAMBAR

Gambar **Halaman**

4.1 Diagram Transfer Model Penyebaran Flu Burung IV-4

4.2 Grafik $S(t)$, $I(t)$ dan $R(t)$ terhadap t untuk titik ekuilibrium bebas penyakit E_0 .... IV-37

4.3 Grafik $S_b(t)$, $I_b(t)$ dan $V_b(t)$ terhadap t untuk titik ekuilibrium bebas penyakit E_0 .... IV-38

4.4 Grafik $S(t)$, $I(t)$ dan $R(t)$ terhadap t untuk titik ekuilibrium endemik E_0 .... IV-42

4.5 Grafik $S_b(t)$, $I_b(t)$ dan $V_b(t)$ terhadap t untuk titik ekuilibrium endemik E_0 .... IV-43

DAFTAR TABEL

Tabel **Halaman**

4.1 Daftar Variabel-variabel.. IV-2

4.2 Daftar Parameter-parameter.. IV-3

4.3 Nilai Parameter untuk Simulasi Model Bebas Penyakit IV-35

4.4 Nilai Parameter untuk Simulasi Model Endemik................................. IV-39

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Flu burung atau *Avian Influenza* adalah suatu penyakit menular yang disebabkan oleh virus influenza tipe A yang ditularkan oleh unggas yang dapat menyerang manusia. Saat ini flu burung menjadi perhatian dunia, karena virus flu burung memiliki kemampuan untuk terus menerus bermutasi. Salah satu mutasi dari virus Ifluenza tipe A adalah H5N1 yang merupakan subtipe paling mematikan diantara subtipe yang lainnya (Depkes RI, 2017).

Subtipe H5N1 pertama kali menyerang manusia pada tahun 1997 di China, yaitu di wilayah Administrasi Khusus Hongkong. Tahun 2003 flu burung yang disebabkan oleh subtipe H5N1 telah menyebar ke berbagai negara di dunia, antara lain China, Vietnam, Thailand, Kamboja, Indonesia, Turki, Irak, Mesir dan Azerbaijan. Di Indonesia flu burung pada manusia pertama kali diinformasikan secara laboratorium pada awal bulan Juli 2005 di Kabupaten Tanggerang, Provinsi Banten (Depkes RI, 2017).

Virus subtipe H5N1 dapat menimbulkan gejala penyakit pernafasan mulai sedang atau bahkan infeksi tanpa gejala sampai akut/fatal pada unggas bahkan dapat menular ke manusia. Penularan flu burung terjadi dari unggas ke unggas, unggas ke manusia. Tidak ada bukti terjadinya penularan dari manusia ke manusia. Walaupun demikian, para ilmuan berpendapat hanya masalah waktu virus tersebut bermutasi (Nur Al-Zikri, 2014). Faktor yang mempengaruhi dalam penularan flu burung di antaranya adalah imigrasi.

Imigrasi pada unggas yang terinfeksi dapat memicu penyebaran penyakit dalam populasi. Semakin banyaknya imigrasi dan populasi pada unggas dapat juga mengakibatkan penambahan populasi unggas rentan *(suscepted)* yang dapat terinfeksi kembali jika terdapat unggas yang terinfeksi masuk kedalam populasi unggas sehingga dapat menyebabkan penyebaran penyakit flu burung (Anggriani dkk, 2015).

Penyebaran penyakit flu burung dapat dicegah dengan melakukan vaksinasi. Dalam Govaert et al (1994) disebutkan bahwa ada penurunan unggas yang terinfeksi flu burung setelah dilakukan vaksinasi. Vaksinasi dilakukan terhadap unggas yang belum terinfeksi flu burung. Pemberian vaksinasi terhadap unggas harus dilakukan secara tepat agar penyebaran penyakit flu burung dapat dihentikan (Moch Chotim, 2003).

Penelitian mengenai model penyebaran flu burung telah banyak dilakukan. Mohammad Derouich dan Abdessla Boutayeb (2008) dalam jurnalnya yang berjudul *An Avian Influenza Mathematical Model*, memodelkan penyebaran virus flu burung dengan asumsi tidak terjadi mutasi. Mereka menggunakan model SIRS pada populasi manusia dan SI pada populasi unggas dengan pertumbuhan konstan dan tidak terjadi kematian pada unggas akibat virus flu burung.

Tri Andri Hutapea (2016) dalam jurnalnya yang berjudul *Penyebaran Virus H5N1 pada Populasi Manusia dengan Kontrol Vaksinasi*, memodelkan penyebaran virus flu burung dengan asumsi terjadinya mutasi. Mereka menggunakan model SIIR pada populasi manusia dan model SI pada populasi unggas. Analisis dari model memperlihatkan bahwa setiap unggas yang terinveksi virus H5N1 akan mati tetapi setiap manusia yang terinfeksi mungkin meninggal atau sembuh.

Kemudian M Kharis dan Amidi (2017) dalam jurnalnya yang berjudul *Mathematical modeling of Avian Influenza epidemic with bird vaccination in constant population*, memodelkan penyebaran penyakit flu burung dengan asumsi terjadinya mutasi. Mereka menggunakan model SIRS pada populasi manusia dan SI pada populasi unggas dengan memberikan vaksinasi terhadap unggas yang rentan penyakit sebagai upaya mencegah dan mengurangi penyebaran penyakit flu burung baik terhadap unggas ke unggas maupun unggas ke manusia.

Dari latar belakang yang penulis paparkan tersebut, penulis tertarik untuk memodelkan penyebaran virus flu burung dengan memodifikasi model M Khais dan Amidi. Modifikasi yang dilakukan dengan menambahkan faktor imigrasi pada unggas domestik. Diasumsikan pertumbuhan unggas domestik adalah pertumbuhan logistik yaitu jumlah unggas tidak dapat bertambah sampai tak terhingga. Penulis memberi judul Tugas Akhir ini *"Model Matematika Penyebaran Flu Burung Pada Manusia dan Unggas Domestik dengan Faktor Imigrasi dan Vaksinasi".*

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah diuraikan tersebut maka rumusan masalah yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana model SIR terhadap penyebaran penyakit flu burung pada populasi manusia dan unggas domestik dengan faktor imigrasi dan vaksinasi ?
2. Bagaimana kestabilan titik-titik ekuilibrium dari model SIR *(Suscepted Infected Recovered)* ?
3. Bagaimana pengaruh vaksinasi dan faktor imigrasi terhadap penyebaran penyakit Flu Burung dengan menggunakan model SIR *(Suscepted Infected Recovered)* ?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diuraikan tersebut maka tujuan penelitian tugas akhir ini sebagai berikut:

1. Mendapatkan model SIR terhadap penyebaran penyakit flu burung pada populasi manusia dan unggas domestik dengan faktor imigrasi dan vaksinasi.
2. Mendapatkan titik ekuilibrium dan kestabilan dari model SIR *(Suscepted Infected Recovered).*
3. Mendapatkan pengaruh vaksinasi dan faktor imigrasi terhadap penyebaran penyakit Flu Burung dengan menggunakan model SIR *(Suscepted Infected Recovered).*

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini antara lain sebagai berikut:

1. Mengetahui pengaruh vaksinasi dan faktor imigrasi terhadap penyebaran penyakit Flu Burung dengan menggunakan model SIR *(Suscepted Infected Recovered)*.
2. Memberi informasi bahwa melakukan vaksinasi dapat mengatasi jumlah yang terinfeksi flu burung, menurunkan angka kesakitan dan kematian penderita flu burung.

1.5 Batasan Masalah

Agar penelitian lebih terfokuskan dan terarah serta menghindari pembahasan yang terlalu luas maka penelitian membuat batasan masalah. adapun batasan-batasan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Penelitian menurunkan model SIR *(Suscepted Infected Recovered)* pada populasi manusia dan model SI pada populasi unggas domestik dengan menambahkan faktor imigrasi dan vaksinasi terhadap unggas domestik yang rentan penyakit.
2. Populasi unggas yang dijadikan objek penelitian terbatas pada unggas domestik.
3. Unggas yang berimigrasi dalam keadaan sehat dan setiap unggas yang berimigrasi jumlahnya tetap.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan tugas akhir disusun berdasarkan bab-bab berikut ini:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini memuat gambaran singkat tentang isi tugas akhir dan membahas tentang latar belakang permasalahan, rumusan masalah, tujuan masalah, manfaat penelitian, batasan masalah dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Landasan teori berisi mengenai teori-teori yang mendukung dan berkaitan dengan pembahasan tugas akhir sehingga dapat membantu penulis maupun pembaca dalam memahami isi tugas akhir.

BAB III METODE PENELITIAN

Metode penelitian berisi proses atau langkah penulisan untuk membangun model matematika penyebaran flu burung pada manusia dan unggas domestik dengan faktor imigrasi dan vaksinasi.

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini berisi model matematika penyebaran flu burung pada manusia dan unggas domestik dengan faktor imigrasi dan vaksinasi, analisa model meliputi titik ekuilibrium, angka rasio reproduksi dasar, analisa kestabilan, dan simulasi model dengan menggunakan *Maple 13*.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran yang diperoleh dari pembahasan.

BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Flu Burung

Flu Burung (FB) atau *Avian Influenza* (AI) pertama kali dilaporkan pada tahun 1878 oleh Perroncito sebagai wabah yang menjangkiti ayam dan burung di Italia. Wabah ini disebut juga sebagai "Penyakit Lombardia" mengikuti nama sebuah daerah lembah di hulu sungai Po. Meskipun di tahun 1901 Centanini dan Savonucci berhasil mengidentikfikasi organisme mikro yang menjadi penyebab penyakit tersebut, baru di tahun 1955 Schafer dapat menunjukkan ciri-ciri organisme itu sebagai virus influenza.

Virus Influenza adalah termasuk ke dalam *family Orthomyxoviridae* dan dikelompokkan ke dalam strain A, B, C dan D sesuai dengan karakteristik antigenik dari protein inti. Virus Influenza A menginfeksi berbagai macam spesies hewan, termasuk manusia, babi, kuda, mamalia laut dan burung. Strain virus influenza A, B, C dan D berisi informasi tentang jenis antigenik virus berdasarkan kekhususan antigen dari *nukleoprotein*, host asal (untuk strain diisolasi dari sumber-sumber non manusia), asal geografis, jumlah regangan, dan tahun isolasi.

Dua glikoprotein permukaan virus, *hemaglutinin* (HA) dan *neuraminidase* (NA) adalah antigen yang paling penting untuk menginduksi kekebalan protektif pada host. Pembagian virus Influenza tipe A dibagi berdasarkan dua protein pada permukaan virus: *hemaglutinin* (H) dan *neuraminidase* (N). Terdapat 18 subtipe *hemaglutinin* yang berbeda (H1-H18) dan 11 subtipe *neuraminidase* yang berbeda (N1-N11). Dan hanya H1, H2, H3, N1, dan N2 telah dikaitkan dengan epidemi penyakit pada manusia.

H5N1 pertama kali menyerang manusia pada tahun 1997 di China, yaitu di Wilayah Administrasi Khusus Hongkong dimana terjadi wabah FB pada unggas dan menjangkiti manusia dengan jumlah kasus 18 dan 6 diantaranya meninggal. Pada bulan Desember 2007 terdapat 2 negara baru yang melaporkan adanya kasus FB pada manusia yaitu Pakistan dan Myanmar. Sampai dengan September 2017, penyakit ini telah menelan korban manusia sebanyak 860 orang dengan kematian 454 orang.

Secara kumulatif jumlah penderita FB di Indonesia sejak akhir Juni 2005-September 2017 adalah sebanyak 200 orang dan 168 orang diantaranya meninggal dengan angka kematian 84%. Di Indonesia FB pada manusia pertama kali diinformasikan secara laboratorium pada awal bulan Juli 2005 dari Kabupaten Tangerang, Provinsi Banten dengan jumlah penderita konfirmasi H5N1 2 orang dan 1 probabel, semua meninggal dunia. Awal sakit (onset) kasus tersebut pada akhir Juni 2005, dan merupakan kasus klaster pertama di Indonesia. Sampai akhir September 2017 penderita FB telah tersebar di 15 Provinsi (Sumatera Utara, Sumatera Barat, Lampung, Sumatera Selatan, Riau, Banten, DKI Jakarta, Jawa Barat, Jawa Tengah, Jawa Timur, Sulawesi Selatan, Bali, D.I. Yogyakarta, Bengkulu, Nusa Tenggara Barat) yang meliputi 59 kabupaten/kota.

Jenis virus AI pada unggas yang menyebabkan wabah pertama di Indonesia tahun 2003 adalah virus AI subtype H5N1, clade 2.1.3.2, bersifat *Highly Pathogenic Avian Influenza* (HPAI) atau menyebabkan angka kematian tinggi pada unggas umumnya, kecuali pada unggas air tidak menyebabkan kematian. Kemudian sejak akhir 2012 Indonesia telah terjangkit virus AI subtype H5N1/HPAI, clade baru 2.3.2.1. yang menyerang semua jenis unggas, terutama unggas air yang paling banyak mengalami kematian. Hingga saat ini virus AI yang bersirkulasi lebih dominan oleh clade 2.3.2.1.

Sebanyak 3 provinsi yang telah ditetapkan dengan Keputusan Menteri Pertanian sebagai zona/wilayah provinsi bebas AI pada unggas, yakni Provinsi Maluku Utara (2015), Maluku (2016) dan Papua (2017). Disamping itu, telah dicapai sebanyak 77 Kompartemen (Unit Usaha Peternakan pembibitan, Budidaya dan Penetasan) yang telah memperoleh Sertifikat Kompartemen Bebas AI walaupun berada pada 9 zona/provinsi masih tertular AI, yakni: Jawa Barat 43 unit, Lampung 13 unit, Jawa Timur 9 unit, Banten 3 unit, Jawa Tengah 3 unit, Bali 2 unit, Nusa Tenggara Timur 2 unit, D.I.Yogyakarta 1 unit, Kalimantan Barat 1 unit kompartemen.

2.2 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang di dalamnya memuat n buah persamaan diferensial, dengan n buah fungsi yang tidak diketahui, dimana n merupakan bilangan bulat positif lebih besar sama dengan 2.

Bentuk umum dari suatu sistem n persamaan orde pertama mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{2.1}$$

dengan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah variabel bebas dan t adalah variabel terikat, sehingga $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ dimana $\dot{x}$ merupakan derivatif fungsi x_n terhadap t, dan f adalah fungsi yang tergantung pada variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dan t (Braun, 1993: 264).

Sistem persamaan diferensial dilihat dari bentuk fungsi atau pangkatnya dibedakan menjadi dua yaitu sistem persamaan diferensial linear dan sistem persamaan diferensial nonlinear.

Definisi 2.1 (Fanizio & Ladas, 1982: 147)

Sistem persamaan diferensial linear adalah persamaan yang terdiri dari lebih dari satu persamaan yang saling terkait. Sistem dari dua persamaan diferensial dengan fungsi yang tak diketahui berbentuk :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + f_1(t) \\ \dot{x}_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + f_2(t) \end{aligned} \tag{2.2}$$

dimana koefisien $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$, dari fungsi-fungsi f_1, f_2 merupakan fungsi t yang kontinu pada suatu selang I dan x_1, x_2 adalah fungsi t yang tak diketahui. Seperti biasanya titik di atas x_1 dan x_2 dalam $y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ menyatakan turunan menurut peubah bebas t.

Sistem persamaan diferensial linear dengan n fungsi-fungsi yang tak diketahui berbentuk :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\
\dot{x}_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\
&\vdots \\
\dot{x}n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

atau secara singkat

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_i + f_i(t), \qquad i = 1,2,3,\ldots,n.$$

Definisi 2.2 (Braun, 1993: 372)

Diberikan Sistem:

$$\dot{x} = f(t,x), \tag{2.4}$$

dengan $x = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ dan $f(x) = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{bmatrix}$ adalah fungsi nonlinear dalam $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Sistem (2.4) disebut sistem persamaan diferensial nonlinear.

Sistem persamaan diferensial baik linear maupun nonlinear mempunyai solusi yang disebut titik ekuilibrium (titik kesetimbangan). Titik ekuilibrium merupakan sebuah keadaan dari suatu sistem yang tidak mengalami perubahan terhadap waktu.

Definisi 2.3 (Perko, 2001: 102)

Titik $\hat{x} \in R^n$ disebut titik ekuilibrium dari $\dot{x} = f(x)$ jika $f(\hat{x}) = 0$.

2.3 Linearisasi

Linearisasi merupakan proses membawa suatu sistem nonlinear menjadi sistem linear. Untuk mencari hasil pelinearan dari sistem persamaan diferensial nonlinear digunakan matriks Jacobian.

Definisi 2.4 (Perko, 2001: 102)

Sistem linear $\dot{x} = Ax$ dengan matriks $A = Jf(\hat{x})$ disebut linearisasi dari sistem $\dot{x} = f(x)$ pada $\hat{x}$.

Teorema 2.1 (Perko, 2001: 67).

Jika $f: R^n \to R^n$ diferensiabel di $\hat{x}$ maka diferensial parsial $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, i, j = 1, \ldots, n$ di $\hat{x}$ ada untuk semua $x \in R^n$, dan

$$Jf(\hat{x})x = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\hat{x})x_j.$$

Bukti:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\hat{x})x_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{x})x_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\hat{x})x_1 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\hat{x})x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\hat{x})x_2 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\hat{x})x_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\hat{x})x_2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\hat{x})x_n \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\hat{x})x_n \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\hat{x})x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\hat{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\hat{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\hat{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\hat{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\hat{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\hat{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\hat{x}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\hat{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= Jf(\hat{x})x.$$

$Jf(\hat{x})$ disebut matriks Jacobian dari fungsi $f: R^n \to R^n$ yang diferensiabel pada $\hat{x} \in R^n$.

Kestabilan sistem nonlinear $\dot{x} = f(x)$ di sekitar titik ekuilibrium $\hat{x}$ dapat dilihat dari kestabilan linearisasi sistem $\dot{x} = f(x)$ di sekitar titik ekuilibrium $\hat{x}$, asalkan titik ekuilibrium $\hat{x}$ hiperbolik (Perko, 2001: 103).

Definisi 2.5 (Perko, 2001: 102)

Titik ekuilibrium $\hat{x} \in R^n$ disebut titik ekuilibrium hiperbolik dari sistem $\dot{x} = f(x)$ jika bagian real nilai eigen dari $Jf(\hat{x}) \neq 0$. Jika bagian real nilai eigen $Jf(\hat{x})$ bernilai 0 maka titik ekuilibrium $\hat{x}$ disebut nonhiperbolik.

Akan ditunjukkan proses mengubah sistem nonlinear ke dalam sistem linear menggunakan deret Taylor. Misal $\hat{x}=(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots,\hat{x}_n)^T$ adalah titik ekuilibrium Sistem $\dot{x}=f(x)$. Deret Taylor dari fungsi f disekitar titik ekuilibrium $\hat{x}$ adalah sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T &= f_1(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T(x_1,\hat{x}_1) \\
&\quad + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T(x_2,\hat{x}_2)+\cdots \\
&\quad + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T(x_n,\hat{x}_n)+R_{f1}, \\
f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T &= f_2(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T(x_1,\hat{x}_1) \\
&\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T(x_2,\hat{x}_2)+\cdots \\
&\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T(x_n,\hat{x}_n)+R_{f2}, \\
&\ \,\vdots \\
f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T &= f_n(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T(x_1,\hat{x}_1) \\
&\quad + \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T(x_2,\hat{x}_2)+\cdots \\
&\quad + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T(x_n,\hat{x}_n)+R_{fn.}
\end{aligned}
$$

$R_{f1},R_{f2},\ldots,R_{fn}$ nilainya mendekati nol sehingga dapat diabaikan dan karena $(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T$ titik ekuilibrium Sistem $\dot{x}=f(x)$ maka $f_1(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T=$ $f_2(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T=\cdots=f_n(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T=0$ sehingga diperoleh

$$
\dot{x}_1=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T(x_1,\hat{x}_1)+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T(x_2,\hat{x}_2)+\cdots
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T(x_n,\hat{x}_n),\\
\dot{x}_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T(x_1,\hat{x}_1)+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T(x_2,\hat{x}_2)+\cdots \qquad (2.5)\\
&+\frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T(x_n,\hat{x}_n),\\
&\vdots\\
\dot{x}_n &= \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T(x_1,\hat{x}_1)+\frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T(x_2,\hat{x}_2)+\cdots\\
&+\frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T(x_n,\hat{x}_n).
\end{aligned}
$$

Sistem (2.5) dapat ditulis dalam bentuk berikut:

$$
\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=
\begin{bmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T\\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T\\
\vdots & \vdots & \ddots & \\
\frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}x_1-\hat{x}_1\\ x_2-\hat{x}_2\\ \vdots\\ x_n-\hat{x}_n\end{bmatrix}. \qquad (2.6)
$$

Misalkan $y_1 = x_1-\hat{x}_1, y_2 = x_2-\hat{x}_2,\ldots, y_n = x_n-\hat{x}_n,$ maka Sistem (2.6) menjadi

$$
\begin{bmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\\ \vdots\\ \dot{y}_n\end{bmatrix}=
\begin{bmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T\\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T\\
\vdots & \vdots & \ddots & \\
\frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_n)^T
\end{bmatrix}
$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

Sistem (2.7) merupakan linearisasi Sistem $\dot{x} = f(x)$ dimana diperoleh matriks Jacobian dari Sistem (2.7) yaitu :

$$Jf(\hat{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots \hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots \hat{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots \hat{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots \hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots \hat{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots \hat{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots \hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots \hat{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots \hat{x}_n)^T \end{bmatrix}$$

Definisi 2.6 (Howard, 2004: 277)

Jika A adalah sebuah matriks berukuran $n \times n$, maka sebuah vektor taknol x pada R^n disebut vektor eigen *(eigenvector)* dari A jika Ax adalah sebuah kelipatan skalar dari x, yaitu:

$$Ax = \lambda x \tag{2.8}$$

untuk skalar sebagai λ. Skalar λ disebut nilai eigen *(eigenvalue)* dari A, dan x disebut sebagai vektor eigen dari A yang bersesuaan dengan λ.

Untuk memperoleh nilai eigen dari sebuah matriks A yang berukuran $n \times n$ maka dituliskan kembali $Ax = \lambda x$ sebagai

$$Ax = \lambda Ix$$

Atau secara ekuivalen

$$(A - \lambda I)x = 0 \tag{2.9}$$

Agar λ dapat menjadi nilai eigen, harus terdapat satu penyelesaian taknol dari persamaan ini. Persamaan (2.9) memiliki penyelesaian taknol jika hanya jika

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Persamaan ini disebut persamaan karakteristik *(characteristic equation)* matriks A, skalar-skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai-nilai eigen A. Apabila diperluas lagi, $\det(A-\lambda I)$ adalah sebuah polinomial dalam variabel λ berderajat n yang disebut sebagai polinomial karakteristik *(characteristic polynomial)* matriks A.

2.4 Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium

Definisi 2.7 (Olsder & Woude, 1994: 53)

Diberikan sistem persamaan diferensial $\dot{x} = f(x)$ dan $x(t, x_0)$ adalah solusi pada saat t dengan kondisi awal $x(0) = x_0$.

1. Vektor $\hat{x}$ memenuhi $f(\hat{x}) = 0$ dikatakan sebagai titik ekuilibrium.
2. Titik ekuilibrium $\hat{x}$ dikatakan stabil jika diberikan $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $\|x_0 - \hat{x}\| < \delta$ maka $\|x(t, x_0) - \hat{x}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq 0$.
3. Titik ekuilibrium $\hat{x}$ dikatakan stabil asimtotik jika titik-titik ekuilibriumnya stabil dan terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $\lim_{t\to\infty}\|x(t, x_0) - \hat{x}\| = 0$, asalkan $\|x_0 - \hat{x}\| < \delta_1$.
4. Titik ekuilibrium $\hat{x}$ dikatakan tidak stabil jika titik ekuilibrium tidak memenuhi (2).

Teorema 2.2 (Olsder & Woude, 1994: 54)

Diberikan matriks Jacobian $Jf(\hat{x})$ dari Sistem nonlinear $\dot{x} = f(x)$ dengan nilai eigen λ.

1. Stabil asimtotik, jika semua nilai eigen dan matriks $Jf(\hat{x})$ bernilai negatif.
2. Tidak stabil, jika terdapat paling sedikit satu nilai eigen matriks $Jf(\hat{x})$ bernilai positif.

Analisis kestabilan titik ekuilibrium juga dapat ditentukan dengan menggunakan kriteria kestabilan *Routh-Hurwitz*. kriteria kestabilan *Routh-Hurwitz* digunakan apabila nilai eigen dari persamaan karakteristik tidak dapat ditentukan dengan mudah.

Definisi 2.8 (Fisher, 1999: 188)

Kriteria kestabilan *Rounth-Hurwitz* adalah suatu metode untuk menunjukkan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar karakteristik secara langsung. Misalkan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah bilangan real, dimana $a_j = 0$ jika $j > n.$ Semua nilai eigen dari persamaan karakteristik $p(\lambda) = a_n + a_{n-1}\lambda + a_{n-2}\lambda^2 + \cdots + a_1\lambda^{n-1} + \lambda^n$ mempunyai bagian real yang negatif jika dan hanya jika determinan dari matriks

$$M_k = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2k-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k \end{bmatrix},$$

dengan $k = 1,2,\ldots,n$ bernilai positif. Untuk $k = 3$ dan $k = 4$ kriteria *Routh-Hurwitz* diberikan berikut ini.

$k = 3; a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1a_2 - a_3 > 0,$

$k = 4; a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, a_1a_2 - a_3 > 0$ dan $a_3(a_1a_2 - a_3) - a_1^2a_4 > 0.$

2.5 Angka Reproduksi Dasar

Menurut Giescke (2002), angka reproduksi dasar adalah rata-rata banyaknya individu rentan yang terinfeksi secara langsung oleh individu lain yang telah terinfeksi, dan masuk ke dalam populasi yang seluruhnya masih rentan.

Kondisi yang timbul adalah salah satu di antara ke mungkinan berikut:

a. Jika $R_0 < 1$ maka penyakit akan menghilang.

b. Jika $R_0 > 1$ maka penyakit akan meningkat menjadi wabah.

Misalkan terdapat n kelas terinfeksi dan m kelas tidak terinfeksi. Selanjutnya dimisalkan pula x menyatakan subpopulasi kelas terinfeksi dan y menyatakan subpopulasi kelas tidak terinfeksi (rentan atau sembuh), dan $x \epsilon R^n$ dan $y \epsilon R^m$, untuk $m, n \epsilon \mathbb{N}$, sehingga

$$\dot{x} = \varphi_i(x,y) - \psi_i(x,y) \text{ dengan } i = 1,2,\ldots,n$$

$$\dot{y} = \eta_i(x, y) \text{ dengan } i = 1,2,\ldots,m$$

Dengan φ_i adalah laju infeksi sekunder yang menambah pada kelas terinfeksi dan ψ_i adalah laju perkembangan penyakit, kematian dan kesembuhan yang mengakibatkan berkurangnya populasi dari kelas terinfeksi.

Perhitungan angka reproduksi dasar (R_0) berdasarkan linearisasi dari sistem persamaan diferensial yang didekati pada titik ekuilibrium bebas penyakit. Persamaan kompartemen terinfeksi yang telah dilinearisasi dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\dot{x} = (F - V)x$$

Dengan F dan V adalah matriks berukuran $n \times n$ dan $F = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_j}(0, y_0)$ dan $V = \frac{\partial \psi_1}{\partial u_j}(0, y_0)$. Selanjutnya didefinisikan matriks K sebagai berikut :

$$K = FV^{-1}$$

Dengan K disebut sebagai matriks next generation. Nilai dari infeksi sekunder pada populasi rentan adalah radius spektral (nilai eigen dominan) dari matriks K (Driessche and Watmough) sehingga

$$R_0 = \rho(FV^{-1}).$$

2.6 Model Epidemi SIR

Model SIR merupakan dasar bagi sebagian besar model deterministik yang masih digunakan sampai saat ini. Model ini pertama kali diperkenalkan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927. Model SIR memiliki struktur dan asumsi yang sama dengan model SI, perluasannya adalah bahwa pada model SIR dimungkinkan populasi/anggota masyarakat yang terinfeksi untuk sembuh serta total populasi yang berjumlah dibagi menjadi tiga subkelompok yang saling ekslusif. Subkelompok rentan (*Susceptibles)* disimbolkan $S(t)$, subkelompok infeksi/tertular (*Infected)* disimbolkan $I(t)$ dan subkelompok yang pindah (*Recovered)* disimbolkan $R(t)$.

$R(t)$ mewakili individu yang meninggal karena penyakit, sembuh dari infeksi dan memiliki kekebalan tubuh yang tetap atau individu yang sudah diasingkan dari sisa populasi. Jadi pada subkelompok terakhir ini, tidak lagi berkontribusi pada penyebaran penyakit/epidemi. Akan tetapi masih tetap dipertahankan sebagai anggota total populasi sebesar N meskipun ada kemungkinan diantaranya ada yang sudah meninggal dunia. Pada model ini diasumsikan juga bahwa individu yang masuk $R(t)$ tidak dapat kembali terinfeksi. Dengan asumsi bahwa α adalah konstanta proporsi dari keadaan individu terinfeksi selanjutnya menjadi recovered persatuan waktu.

Maka dengan demikian model persamaan diferensial yang mewakili tingkat perubahan populasi yang rentan persatuan waktu tetap seperti pada model SI seperti:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI$$

dengan kondisi awal $S(0) = S_0$ dan $I(0) = I_0$. Hal ini dikarenakan tidak ada transfer lansung dari individu-individu dari subkelompok rentan terhadap subkelompok yang pindah. Namun model persamaan diferensial dari subkelompok tertular perlu dimodifikasi untuk memperhitungkan jumlah individu yang tertular dan sembuh/pulih. Ketika jumlah yang pindah sebanding dengan jumlah yang tertular tiap satuan waktu, maka model persamaan diferensialnya menjadi

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I - \mu I$$

Sedangkan laju pertumbuhan jumlah kepindahan tiap satuan waktu adalah:

$$\frac{dR}{dt} = \alpha I - \mu R$$

dengan kondisi awal: $R(0) = R_0$, sehingga model persamaan diferensial yang lengkap yang merupakan model SIR adalah:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \mu - \mu S$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I - \mu I$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha I - \mu R$$

dengan kondisi awal: $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$, $R(0) = R_0$ dan $S(t) + I(t) + R(t) = N$.

BAB III

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan untuk membangun model penyebaran penyakit flu burung pada populasi manusia dan unggas domestik dengan faktor imigrasi dan vaksinasi adalah menggunakan metode penelitian studi literature dan mempelajari jurnal-jurnal yang berhubungan dengan pemodelan matematika. Adapun rincian langkah-langkah penelitian pada tugas akhir ini adalah:

1. Menentukan variabel-variabel serta parameter-parameter yang akan digunakan pada model yaitu sebagai berikut :

   $S(t)$: Jumlah total manusia yang rentan pada saat t.

   $I(t)$: Jumlah total manusia yang terinfeksi pada saat t.

   $R(t)$: Jumlah total manusia yang sembuh pada saat t.

   $S_b(t)$: Jumlah total unggas domestik yang rentan pada saat t.

   $I_b(t)$: Jumlah total unggas domestik yang terinfeksi pada saat t.

   $V_b(t)$: Jumlah total unggas domestik yang divaksinasi pada saat t.

   $N(t)$: Jumlah total populasi manusia pada saat t.

   $N_b(t)$: Jumlah total unggas domestik pada saat t.

   μ : Laju kelahiran manusia yang diasumsikan sama dengan laju kematian.

   μ_b : Laju kelahiran unggas domestik yang diasumsikan sama dengan laju kematian.

   β : Laju kontak infektif antara unggas domestik sakit dengan manusia sehat.

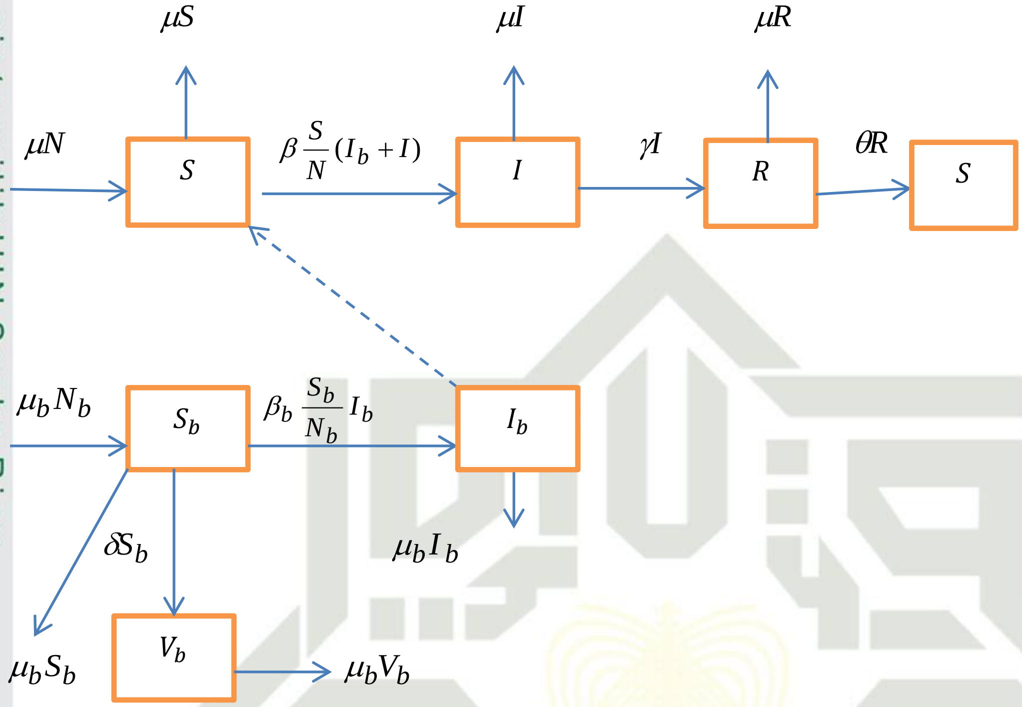
   β_b : Laju kontak infektif antara unggas domestik sehat dengan unggas domestik sakit.

   γ : Laju dari kelas *Recovered* ke kelas *Suscepted*.

   θ : Laju kekebalan pada manusia yang sembuh.

   δ : Laju vaksinasi pada unggas yang rentan.

2. Diberikan model SIR M Kharis dan Amidi sebagai berikut :



3. Dari model (2) dibentuk model baru dengan menambahkan faktor imigrasi pada populasi unggas domestik. Faktor imigrasi diasumsikan terjadi pada populasi unggas yang rentan / sehat dengan anggapan adanya unggas yang datang dan pergi.
4. Menurunkan model yang di langkah (3) maka dicari titik ekuilibrium.
5. Melakukan linearisasi pada model dengan menggunakan matriks Jacobian di titik ekuilibrium.
6. Menganalisa kestabilan titik ekuilibrium yang telah ditentukan.
7. Simulasi model untuk melihat pengaruh faktor imigrasi dan vaksinasi.
8. Menyimpulkan hasil dari analisis titik ekuilibrium.

BAB V
PENUTUP

5.1. Kesimpulan

Dari pembahasan yang telah dilakukan, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Berdasarkan asumsi-asumsi yang dibuat diperoleh mode $SIRS_bI_bV_b$ pada penyebaran flu burung pada manusia dan unggas domestik dengan faktor imigrasi dan vaksinasi yang diekspresikan sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \mu N + \theta R - S\left(\beta \frac{I_b + I}{N} + \mu\right) \\
\frac{dI}{dt} &= \beta \frac{S}{N}(I_b + I) - (\mu + \gamma)I \\
\frac{dR}{dt} &= \gamma I - (\theta + \mu)R \\
\frac{dS_b}{dt} &= A + \mu_b N_b - \left(\beta_b \frac{I_b}{N_b} + \delta + \mu_b\right)S_b \\
\frac{dI_b}{dt} &= \beta_b \frac{S_b}{N_b} I_b - \mu_b I_b \\
\frac{dV_b}{dt} &= \delta S_b - \mu_b V_b \\
S + I + R &= N \\
S_b + I_b + V_b &= N_b
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Karena populasi pada manusia bersifat konstan dengan $\frac{dN}{dt} = 0$ maka Sistem (5.1) tersebut dapat ditulis menjadi Sistem (5.2) di bawah ini

$$
\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \mu N + \theta R - S\left(\beta \frac{I_b + I}{N} + \mu\right) \\
\frac{dI}{dt} &= \beta \frac{S}{N}(I_b + I) - (\mu + \gamma)I \\
\frac{dS_b}{dt} &= A + \mu_b N_b - \left(\beta_b \frac{I_b}{N_b} + \delta + \mu_b\right)S_b
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

$$\frac{dI_b}{dt} = \beta_b \frac{S_b}{N_b} I_b - \mu_b I_b$$

$$\frac{dV_b}{dt} = \delta S_b - \mu_b V_b$$

2. Dari analisis model matematika yang dalam hal ini Sistem (5.2) yang dianalisa, diperoleh angka rasio reproduksi dasar $R_0 = \frac{\beta\beta_b(A+\mu_b N_b)}{\mu_b N_b(\delta+\mu_b)(\mu+\gamma)}$. Kemudian diperoleh dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Titik ekuilibrium bebas penyakitnya adalah $E_0 = (S^*, I^*, S_b^*, I_b^*, V_b^*) = \left(N, 0, \frac{A+\mu_b N_b}{\delta+\mu_b}, 0, \frac{\delta(A+\mu_b N_b)}{\mu_b(\delta+\mu_b)}\right)$ dan titik ekuilibrium endemiknya adalah $E_1 = (\hat{S}, \hat{I}, \hat{S}_b, \hat{I}_b, \hat{V}_b)$ dengan $\hat{S} = \frac{(\mu+\gamma)\hat{I}N}{(\hat{I}_b+\hat{I})\beta}$, $\hat{I} = \hat{I}$, $\hat{S}_b = \frac{\mu_b N_b}{\beta_b}$, $\hat{I}_b = \frac{\beta_b(A+\mu_b N_b) - \mu_b(\delta N_b + \mu_b N_b)}{\mu_b \beta_b}$ dan $\hat{V}_b = \frac{\delta N_b}{\beta_b}$. Kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik jika $R_0 < \frac{\beta_b(A+\mu_b N_b)}{\mu_b N_b(\delta+\mu_b)} < 1$ dan $R_0 < \frac{\beta}{\mu+\lambda} < 1$ dan kestabilan titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik jika $R_0 > 1$.
3. Berdasarkan angka $R_0 = \frac{\beta\beta_b(A+\mu_b N_b)}{\mu_b N_b(\delta+\mu_b)(\mu+\gamma)}$, jika diambil $\delta \geq 0.20$ dan $A \leq 0.046$ maka $R_0 < \frac{\beta_b(A+\mu_b N_b)}{\mu_b N_b(\delta+\mu_b)} < 1$ dan $R_0 < \frac{\beta}{\mu+\lambda} < 1$, sehingga penyakit tidak akan meluas, menghilang dari populasi dan bebas penyakit. Jika diambil $\delta < 0.20$ dan $A \geq 0$, maka $R_0 > 1$, sehingga penyakit akan mewabah atau tidak akan menghilang dari populasi dan terjadi endemik.

5.2. Saran

Dalam penelitian model $SIRS_bI_bV_b$ pada penyebaran flu burung pada manusia dan unggas domestik dengan faktor imigrasi dan vaksinasi yang diasumsikan laju kelahiran sama dengan laju kematian. Oleh karena itu, penulis memberikan saran kepada pembaca yang tertarik pada masalah ini untuk mengembangkan model $SIRS_bI_bV_b$ dengan memperhatikan laju kelahiran yang tidak sama dengan laju kematian.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Zikri, Nur. 2014. *Pemodelan Matematika Penyebaran Virus Flu Burung pada Sistem Manusia-Unggas.* Pekanbaru: Skripsi Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Anggriani, N., dkk. 2015. *Kontrol Optimum pada Model Epidemi SIR denganPengaruh Vaksinasi dan Faktor Imigrasi.* Bandung: Jurusan Matematika FMIPA Unpad.

Anton, Howard. 1997. *Aljabar Linear Elementer Edisi Kelima.* Jakarta: Penerbit Erlangga.

Braun, M. 1993. *Differential Equation Models.* New York: Springer-Verlag.

Chotim, Moch., dan Mohammad Kharis. 2003. *Model Matematika Wabah Flu Burung pada Populasi Unggas dengan Pengaruh Vaksinasi.* Semarang: Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang.

Depkes RI. 2017. *Perkembangan Flu Burung pada Manusia dan Langkah-langkah Pengendaliannya.* Jakarta: Departemen Kesehatan RI.

Derouich, Mohamed., & Abdesslam Boutayed. 2008. *An Avian Influenza Mathematical* Model. Hikari, Ltd *Applied Mathematical Sciences, Vol. 2, no. 36, 1749-1760.*

Driessche, P & Watmough, J. 2002. Reproduction Number and Sub-threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*. 180: 29-48.

Finizio, N., & Landas, G. 1982. *An Introduction to Differential Equations.* California: University of Rhode Island.

Fisher, S. D. 1999. *Complex Variables Second Edition.* California: Wadsworth & Software. Pacific Growe.

Hutapea, Tri Andri. 2016. *"Penyebaran Virus H5N1 pada Populasi Manusia dengan Kontrol Vaksinasi".* Medan: Jurusan Matematika FMIPA Unimed.

Kartono. 2001. *Maple untuk Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: J&J Learning.

Kharis, M., & Amidi. 2017. *Mathematical modeling of Avian Influenza epidemic with bird vaccination in constant population".* Semarang: Universitas Negeri Semarang.

Olsder, G.J., & Woude, J.W. van der. 1994. *Mathematical Systems Theory Second Edition.* The Netherlands: Delft University.

Perko, L. 2001. *Differential Equation and Dynamical System*. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan pada tanggal 13 Maret 1995 di Pasaman Timur, Sumatera Barat. Sebagai anak ketiga dari tiga bersaudara dari pasangan Bapak Safri dan Ibu Nilawati. Penulis menyelesaikan pendidikan formal pada sekolah dasar di SDN 03 Lansat Kadap pada tahun 2008. Pada Tahun 2011 penulis menyelesaikan sekolah menengah pertama di MTsN Lansat Kadap dan menyelesaikan pendidikan menengah atas di MAN Rao Selatan pada Tahun 2014. Pada Tahun 2015 penulis melanjutkan pendidikan ke perguruan tinggi Universitas Negeri Sultan Syarif Kasim Riau di Fakultas Sains dan Teknologi jurusan Matematika.

Pada Tahun 2018 penulis mengikuti kuliah kerja nyata (KKN) di Desa Batu Songgan, Kabupaten Kampar Kiri Hulu, Riau. Pada Tahun 2018 pada semester IV penulis melaksanakan kerja praktek di Badan Pusat Statistik Pekanbaru dengan Judul "**Analisis Pengaruh Pertumbuhan Ekonomi Terhadap Jumlah Penduduk Miskin di Provinsi Riau**" yang dibimbing oleh Bapak Mohammad Soleh, M.Sc, dari tanggal 15 Januari sampai 15 Februari dan diseminarkan pada tanggal 12 Juni 2018.

Pada tanggal 13 September 2019 penulis dinyatakan lulus dalam ujian sarjana dengan judul tugas akhir "**Model Matematika Penyebaran Flu Burung pada Manusia dan Unggas Domestik dengan Faktor Imigrasi dan Vaksinasi**" dibawah bimbingan Bapak Mohammad Soleh, M.Sc.